Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen: Analogie zur Richtungsableitung

Im Tut habe ich ja gesagt, dass ich mir eine Möglichkeit überlegt habe, wie man die Formel

$$\delta f(u,u') = \frac{\partial f(u,u')}{\partial u}\delta u + \frac{\partial f(u,u')}{\partial u'}\delta u'$$

ohne Taylorentwicklung herleiten kann. Ich habe vollstes Verständnis, wenn euch das überhaupt nicht interessiert, aber da ich mir die Arbeit schon mal gemacht habe, wollte ich es trotzdem mal online stellen ;-) Ich muss aber darauf hinweisen, dass das teilweise auf meinem eigenen Mist gewachsen ist, ich kann die Korrektheit der kompletten Herleitung also nicht mit Quellen belegen. Aber ich würde es nicht online stellen, wenn ich schwerwiegende Denkfehler befürchten würde.

Richtungsableitung

Ich weiß nicht, ob ihr in HM oder vielleicht sogar in der Schule schon über die Richtungsableitung gestolpert seid. Dazu betrachte man eine skalare, mehrdimensionale Funktion $f(\vec{x})$. f ist *kein* Vektor, sondern eine Zahl (ein Skalar) und $\vec{x}$ ist ein Vektor. Zum Beispiel

$$f(\vec{x}) = f(x,y) = 3x^2 + \frac{5\sqrt{x}}{y}.$$

Ist $\vec{x}$ ein zweidimensionaler Vektor $\vec{x} = (x,y)^T$, so kann f zum Beispiel die Höhenmeter über dem Meeresspiegel einer hügeligen Landschaft an jedem Ort $\vec{x}$ ausspucken. $|\nabla f(\vec{x})|$ liefert einem dann die Steigung des Hügels am Ort $\vec{x}$ *in Richtung des steilsten Anstiegs*; also die Steigung, die man erklimmen muss, wenn man den Berg direkt hochsteigt. Am selben Ort $\vec{x}$ kann man aber auch in eine andere Richtung gehen – zum Beispiel am Berghang entlang – und in diese Richtung ist die Steigung null. Oder ich gehe am Ort $\vec{x}$ bergab, dann ist die Steigung negativ. In mehrdimensionalen Funktionen hängt die Steigung also nicht nur vom Ort $\vec{x}$ ab, sondern auch von der Richtung, in die ich gehe.

Man lege diese Richtung durch einen Vektor $\vec{h}$ fest und definiere die Richtungsableitung einer Funktion $f(\vec{x})$ in diese Richtung als

$$D_{\vec{h}} f(\vec{x}) \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f\big(\vec{x} + t\vec{h}\big) - f(\vec{x})}{t},$$

ähnlich zur Definition der gewöhnlichen Ableitung. Diese Formel können wir in eine brauchbarere Form bringen. Wir fügen eine Null in Form einer Variablen a ein, die wir null setzen:

$$D_{\vec{h}} f(\vec{x}) = \lim_{t\to 0} \frac{f\big(\vec{x} + (a+t)\vec{h}\big) - f\big(\vec{x} + a\vec{h}\big)}{t}\Bigg|_{a=0}$$

Ein Vergleich mit der gewöhnlichen Ableitung

$$\frac{df(a)}{da} \coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t}$$

zeigt, dass man dies auch als gewöhnliche Ableitung nach a schreiben kann:

$$D_{\vec{h}} f(\vec{x}) = \left.\frac{df\left(\vec{x} + a\vec{h}\right)}{da}\right|_{a=0}.$$

Man definiere $\vec{\gamma}(a) \coloneqq \vec{x} + a\vec{h}$ und erhält in Komponentenschreibweise mit Kettenregel die folgende Formel:

$$D_{\vec{h}} f(\vec{x}) = \left.\frac{df\left(\vec{\gamma}(a)\right)}{da}\right|_{a=0} = \left.\frac{df(\{\gamma_i(a)\})}{da}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial f(\{\gamma_i(a)\})}{\partial \gamma_j}\frac{d\gamma_j(a)}{da}\right|_{a=0} = \left.\frac{\partial f(\{\gamma_i\})}{\partial \gamma_j} h_j\right|_{a=0} = \nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h}.$$

Diese Formel für die Richtungsableitung mit dem Nabla-Operator ist auch garantiert richtig, die findet man überall im Internet.

Analoge Behandlung einer Variation

Genauso, wie wir die Richtungsableitung in eine Richtung $\vec{h}$ definiert haben, definieren wir nun eine Variation einer Funktion $f\left(u(x)\right)$ um eine Funktion $h(x)$, wobei u um h variiert werden soll:

$$\begin{aligned}
\delta_{h(x)} f\left(u(x)\right) &\coloneqq \lim_{t\to 0} \frac{f\left(u(x) + t\,h(x)\right) - f\left(u(x)\right)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \left.\frac{f\left(u(x) + (a+t)h(x)\right) - f\left(u(x) + ah(x)\right)}{t}\right|_{a=0} = \left.\frac{df\left(u(x) + ah(x)\right)}{da}\right|_{a=0} \\
&= \frac{\partial f\left(u(x)\right)}{\partial u} h(x).
\end{aligned}$$

Nach denselben Rechenschritten finden wir diesen Zusammenhang, in voller Analogie zu $\nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h}$. Hängt f von mehreren Variablen ab, muss in folgender Form summiert werden:

$$\delta_{h(x),g(x)} f(u,v) = \frac{\partial f(u,v)}{\partial u} h(x) + \frac{\partial f(u,v)}{\partial v} g(x).$$

Auch das steht in voller Analogie zur Richtungsableitung: Das Skalarprodukt $\nabla f(\vec{x}) \cdot \vec{h}$ ist ja nichts anderes, als eine Summe über die Komponenten der Vektoren. Bei der Variationsrechnung sind diese Komponenten eben nicht $x_1, x_2, \dots$ und $h_1, h_2, \dots$ sondern u, v und h, g.

Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen

In unserem Fall wollen wir $f\left(y(x), y'(x)\right)$ variieren. Wenn wir y um eine Funktion h variieren, wird y' automatisch um h' variiert – alles andere wäre inkonsistent. Also wollen wir die Variation $\delta_{h,h'}$ berechnen (in diesem Fall steht da noch ein Integral, weil es die Aufgabe so verlangt, aber das stört ja nicht[1]):

$$\begin{aligned}
0 \overset{!}{=} \delta_{h,h'} \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(y,y') &\overset{\mathrm{I}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f(y,y')}{\partial y} h + \frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} h'\right) \\
&\overset{\mathrm{II}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f(y,y')}{\partial y} h - \left(\frac{d}{dx}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'}\right) h\right) \\
&\overset{\mathrm{III}}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \left(\frac{\partial f(y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'}\right) h \quad \overset{\mathrm{IV}}{\Leftrightarrow} \quad \frac{\partial f(y,y')}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f(y,y')}{\partial y'} = 0
\end{aligned}$$

[1] Okay, das stört schon, wenn man nicht glaubt, dass das $\delta_{h,h'}$ mit dem Integral vertauscht. Wir haben das $\delta_{h,h'}$ als irgendeinen Limes definiert und der Limes vertauscht ja auch unter bestimmten (Stetigkeits-)Bedingungen mit dem Integral. Vermutlich gelten also dieselben Bedingungen auch für die Vertauschung der Variation mit dem Integral. Aber da bin ich zu wenig Mathematiker, als ich die Lust gehabt hätte, mich damit näher zu beschäftigen.

Hier haben wir die ganzen Schritte noch ausgeführt, die ich im Tut erläutert habe:

I. Wir vertauschen die Variation und das Integral und setzen die eben in Analogie zur Richtungsableitung hergeleitete Formel für die Variation der Funktion f ein.

II. Wir integrieren (nur!) den hinteren Term partiell. Nochmal kurz die Formel der partiellen Integration:

$$\int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x) g(x) = [f(x)G(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx\, f'(x)G(x)$$
$$\overset{g \to h'}{\Leftrightarrow} \quad \int_{x_1}^{x_2} dx\, f(x) h'(x) = [f(x)h(x)]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} dx\, f'(x)h(x).$$

Das heißt wir „werfen" die Ableitung d/dx von der Funktion h auf die andere Funktion, nämlich auf $\partial f / \partial y'$. Wir fangen uns das übliche Minuszeichen der partiellen Integration ein. Die Randterme habe ich gar nicht hingeschrieben, die verschwinden sowieso (wie glücklicherweise sehr häufig in der Physik), da wir annehmen, dass $h(x_1) = h(x_2) = 0$, dass wir an Start- und Endpunkt keine Variation haben. In dieser Aufgabe macht das deswegen Sinn, weil wir ja *wissen*, dass das Seil an genau diesen Punkten $y(x_1), y(x_2)$ befestigt ist.

III. Jetzt können wir h ausklammern.

IV. Wir fordern, dass die Variation *für beliebige* h verschwinden soll,[2] dass also das Integral, dass nach Schritt III dasteht für *beliebige* Funktionen $h(x)$ null ergeben soll. Das ist nur möglich, falls der Rest von dem, was im Integral steht, gleich null ist.

[2] Ich nehme an, dass diese Forderung bei der Variationsrechnung in fast allen Anwendungen gestellt wird, sodass man sich den Index von $\delta_{h,h'} \to \delta$ spart. Denn wenn es am Ende eh für beliebige h gelten muss, brauch ich mein h auch nicht zu spezifizieren.